

# Solução Intervalar para Experimento Físico Utilizando Mínimos Quadrados e GeoGebra

**Resumo.** Este trabalho propõem o uso da Matemática Intervalar em conjunto com o Método dos Mínimos Quadrados, para oferecer mais confiabilidade em soluções de problemas de estimativa de funções oriundos de práticas experimentais. A Matemática Intervalar será utilizada para representar os dados de uma prática experimental correspondente ao deslocamento de um carro em um tubo de ar inclinado. Para estimar a função horária do espaço que melhor se ajusta aos dados, o sistema intervalar obtido será desmembrado em dois, cada um correspondendo a uma das extremidades dos dados intervalares. A resolução de cada sistema real será feita aplicando o Método dos Mínimos Quadrados. Toda a resolução será feita no software GeoGebra, assim como o esboço dos dados e das funções de ajuste. Comparando a solução obtida com esta técnica com a solução clássica obtida por meio do software Pasco Capstone, conclui-se que a nova solução é mais precisa e que em conjunto com a solução clássica pode agregar mais confiabilidade à solução do problema.

**Palavras-chave.** Ajuste de Dados, GeoGebra, Matemática Intervalar, Mínimos Quadrados.

## 1. Introdução

As ciências experimentais, como a Física e a Engenharias, lidam constantemente com dados numéricos oriundos de práticas experimentais que trazem uma incerteza inerente do próprio processo de medição. Esses dados, geralmente associados a grandezas físicas, devem ser claramente interpretados e, muitas vezes, essas medidas ficam sujeitas a erros que não podem ser eliminados. Por isso, neste contexto, para incluir o máximo de informação, procura-se utilizar o valor mais provável a menos de uma incerteza [8].

Segundo [9], a incerteza no valor de uma grandeza  $x$  indica o quanto ela pode ser diferente do valor verdadeiro. Neste estudo, fundamentado pela Teoria de Erros, é comum utilizar probabilidades e a função gaussiana, também conhecida por função normal de erros, para descrever erros experimentais. Muitos softwares utilizados para lidar com dados experimentais já são implementados levando em conta esse contexto e utilizam uma aritmética apropriada.

A teoria de ajustes de dados é, sem dúvida, uma ferramenta muito importante nas áreas experimentais que lidam com dados, uma vez que a partir das observações

pretende-se estimar a função que descreve de forma mais precisa o problema. Por exemplo, o software Pasco Capstone, atualizado nesta área, utiliza a Teoria de Erros para fornecer a análise de ajuste de dados com as incertezas, bastando que o usuário entre com as informações numéricas do experimento.

Outra teoria utilizada para lidar com incertezas numéricas é a Matemática Intervalar. Esta teoria utiliza intervalos reais do tipo  $[\underline{x}, \bar{x}]$  para representar os dados, de tal forma que o valor verdadeiro ou esperado fica compreendido entre as extremidades  $\underline{x} = x - \delta$  e  $\bar{x} = x + \delta$ . Os números intervalares, cujo conjunto é denotado por  $\mathbb{IR}$ , foram introduzidos por Moore (1966) com o objetivo de capturar e operar com as incertezas no próprio intervalo [7].

Por fim, o Método dos Mínimos Quadrados é uma ferramenta muito importante, estudada em Álgebra Linear por meio de projeções ortogonais, que fornece a melhor solução aproximada para sistemas inconsistentes. Uma vez que problemas experimentais lidam com ajustes de funções através da resolução de algum sistema, esse método é muito adequado para agregar confiabilidade aos resultados dos experimentos.

Este trabalho tem por objetivo utilizar a Matemática Intervalar e o Método dos Mínimos Quadrados para obter a função de ajuste para um conjunto de dados obtidos por meio de uma prática experimental realizada em um laboratório de Física. A Matemática Intervalar será utilizada para representar as incertezas nos dados, o que dará origem a um sistema linear intervalar. Considerando as extremidades inferiores e superiores dos dados, serão definidos dois sistemas, que serão solucionados pelo Método dos Mínimos Quadrados, que fornecerá a melhor solução. O desenvolvimento de toda a solução será implementado na Janela CAS do software GeoGebra, que também será utilizado para ilustrar a distribuição dos dados e exibir as funções de ajuste de cada sistema. As sintaxes e principais funções deste software podem ser vistos em [2, 4].

## 2. Abordagem Matricial para o Método de Mínimos Quadrados

O processo de Mínimos Quadrados fornece a melhor solução aproximada para sistemas lineares inconsistentes [1]. Existem algumas formas diferentes de abordar e desenvolver esse método, nesse trabalho ele será desenvolvido via Álgebra Linear e, posteriormente, será aplicado no problema de ajuste de dados experimentais.

Pela Álgebra Linear, um sistema  $A \vec{x} = \vec{b}$ , onde  $\vec{x}$  é o vetor coluna constituído pelas variáveis reais  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , é consistente se, e somente se, o vetor coluna  $\vec{b}$ , de termos independentes, é combinação linear dos vetores coluna de  $A$ , constituídos pelos coeficientes das variáveis [1]. Supondo que  $W$  é o espaço-coluna de  $A$ , o sistema  $A \vec{x} = \vec{b}$  será inconsistente quando  $\vec{b} \notin W$ . Neste caso, a melhor solução para o problema será aquela obtida substituindo  $\vec{b}$  pelo vetor de  $W$  que mais se aproxima dele. Este vetor é exatamente a projeção de  $\vec{b}$  em  $W$ , denotada por

$proj_W \vec{b}$ , pois produzirá o erro  $\|\vec{b} - proj_W \vec{b}\|$  mínimo. A solução obtida por esse método é a melhor solução aproximada para o problema e conhecida como solução por Mínimos Quadrados.

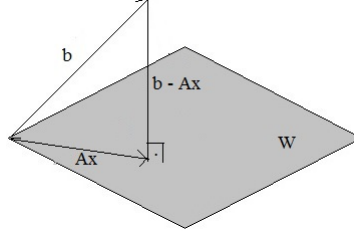


Figura 1: Se  $A \vec{x} = \vec{b}$ , trocando  $\vec{b}$  por  $proj_W \vec{b}$ , temos  $A \vec{x} = proj_W \vec{b}$ .

Como o espaço-coluna de  $A$  e o espaço-nulo de  $A^T$  são complementos ortogonais, o vetor  $\vec{b} - A \vec{x}$  satisfaz o sistema  $A^T \vec{x} = \vec{0}$ , uma vez que  $\vec{b} - A \vec{x}$  é ortogonal à  $W$ , como mostra Figura 1. Assim,

$$A^T A \vec{x} = A^T \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b} \quad (2.1)$$

O sistema da equação (2.1) é conhecido como sistema auxiliar e fornece a melhor solução  $\vec{x} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$  para o sistema  $A \vec{x} = \vec{b}$ .

### 3. Vetores e Matrizes Intervalares

As incertezas em dados numéricos estão muito presentes na área computacional e nas ciências que lidam com experimentos. Essas incertezas surgem quando se torna necessário registrar um valor real ou estimar alguma grandeza física.

A Matemática Intervalar é uma teoria indicada para lidar com essas incertezas. Esta teoria, introduzida por Moore em 1966, trabalha com intervalos reais do tipo  $X = [\underline{x}, \bar{x}]$ , onde  $\underline{x} \leq \bar{x}$ , e possui algumas aritméticas específicas, como a aritmética de Moore [7].

É comum em problemas experimentais recorrer-se à sistemas lineares para obter o valor da variável, que por sua vez, apresenta-se expressa por suas coordenadas na forma de vetor. Estendendo alguns conceitos ao caso intervalar, define-se em [3] o vetor intervalar  $x^I = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  ou  $x^I = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n]^T$ , por um vetor cujas coordenadas  $X_i$  são intervalos reais. Já a matriz intervalar  $A^I = (A_{ij})_{m \times n}$  é definida como um agrupamento de  $m$  linhas e  $n$  colunas cujos termos  $A_{ij}$ , para todo  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ , são intervalos reais. Utilizando-se a aritmética de Moore para operar os intervalos envolvidos as operações com vetores e matrizes intervalares são semelhantes às do caso clássico real. Um dos objetivos deste trabalho é modelar problemas experimentais através de um sistema intervalar  $A^I x^I = b^I$ , onde  $A^I =$

$$(A_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} [\underline{A}_{11}, \bar{A}_{11}] & \dots & [\underline{A}_{1n}, \bar{A}_{1n}] \\ \dots & \dots & \dots \\ [\underline{A}_{m1}, \bar{A}_{m1}] & \dots & [\underline{A}_{mn}, \bar{A}_{mn}] \end{bmatrix} \text{ é a matriz intervalar correspondente}$$

aos coeficientes das variáveis,  $x^I = [[\underline{x}_1, \bar{x}_1] \ \dots \ [\underline{x}_n, \bar{x}_n]]^T$  é o vetor intervalar que representa as variáveis e  $b^I = [[\underline{b}_1, \bar{b}_1] \ \dots \ [\underline{b}_m, \bar{b}_m]]^T$  é o vetor intervalar correspondente aos termos independentes do sistema.

A solução do problema será o vetor intervalar  $x^I = [[\underline{x}_1, \bar{x}_1] \ \dots \ [\underline{x}_n, \bar{x}_n]]^T$  constituído pela solução ínfima e suprema correspondentes aos sistemas  $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$  e  $\bar{A} \bar{x} = \bar{b}$ , onde  $\underline{A}$  é a matriz real constituída pelos extremos inferiores  $\underline{A}_{ij}$ ,  $\underline{b}$  é o vetor real constituído pelos extremos inferiores  $\underline{b}_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  e  $\underline{x}$  é o vetor real constituído pelos extremos inferiores  $\underline{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Para o sistema  $\bar{A} \bar{x} = \bar{b}$ , os termos  $\bar{A}$ ,  $\bar{x}$  e  $\bar{b}$  são definidos analogamente utilizando os extremos superiores dos respectivos intervalos, [?].

#### 4. Solução Intervalar para Experimento com Movimento Retilíneo Uniformemente Variado

O conjunto de dados  $(0.211, 0.25), (0.391, 0.30), (0.527, 0.35), (0.710, 0.40), (0.918, 0.50), (1.080, 0.60), (1.393, 0.80), (1.639, 1.00), (1.878, 1.20), (2.071, 1.40)$ , do tipo  $(t, s(t))$ , foi obtido em um experimento realizado no Laboratório de Física da Escola de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Rio Grande do Norte. O experimento consistiu em registrar o tempo de percurso  $t$  e o deslocamento  $s(t)$  de um carro que se movia livremente sobre um trilho de ar inclinado (Figura 2) e, com as informações, obteve-se o ajuste da função horária do espaço  $s(t) = s_0 + v_0 t + at^2/2$ , onde  $s_0$ ,  $v_0$  e  $a$  são, respectivamente, a posição inicial, a velocidade inicial e a aceleração do carro. Ao todo, foram coletados dez pontos do tipo  $(t, s(t))$ .

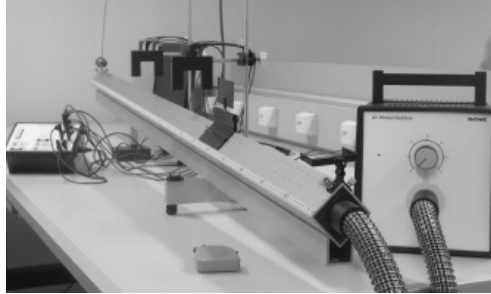


Figura 2: Trilho de ar inclinado.

Existem alguns softwares, como o Pasco Capstone, que são usualmente utilizados em laboratórios experimentais para resolver problemas como o descrito acima em termos de desvios e variâncias. Com os dados apresentados, o software Pasco Capstone fornece como solução a seguinte função:

$$s(t) = (0.224 \pm 0.004)t^2 + (0, 10 \pm 0.02)t + (0.223 \pm 0.008) \quad (4.1)$$

Como alternativa à esta solução, aqui será utilizada a Matemática Intervalar e o Método dos Mínimos Quadrados para propor a melhor solução aproximada considerando-se previamente uma incerteza no registro e medição dos dados. Agregando esses dois métodos à solução clássica obtida com o software Pasco Capstone, pretende-se dar mais confiabilidade à solução obtida. Para isso, a informação  $(t, s(t))$  será considerada em forma matricial  $[t \ s(t)]^T$  para viabilizar a implementação da solução que será feita na janela CAS do software GeoGebra. Uma forma de implementar soluções de sistemas na janela CAS do software GeoGebra pode ser vista em [5].

Considerando as incertezas de 0.001 e 0.01 nas medidas do tempo e da distância, respectivamente, as informações  $[t \ s(t)]^T$  são convertidas nas informações intervalares  $[t^I \ s(t)^I]^T$  dadas por  $[[0.210, 0.212] \ [0.24, 0.26]]^T$ ,  $[[0.390, 0.392] \ [0.29, 0.31]]^T$ ,  $[[0.526, 0.528] \ [0.34, 0.36]]^T$ ,  $[[0.709, 0.711] \ [0.39, 0.41]]^T$ ,  $[[0.917, 0.919] \ [0.49, 0.51]]^T$ ,  $[[1.079, 1.081] \ [0.59, 0.61]]^T$ ,  $[[1.392, 1.394] \ [0.79, 0.81]]^T$ ,  $[[1.638, 1.640] \ [0.99, 1.01]]^T$ ,  $[[1.877, 1.879] \ [1.19, 1.21]]^T$  e  $[[2.070, 2.072] \ [1.39, 1.41]]^T$ .

Ao substituir as extremidades inferiores e superiores dos intervalos  $t^I$  e  $s(t)^I$  na função  $s(t) = bt^2 + v_0t + s_0$ , onde  $b = \frac{a}{2}$ , dá-se origem a dois sistemas, que serão denominados sistema ínfimo e sistema supremo, respectivamente, denotados por  $\underline{S}$  e  $\overline{S}$  e representados pelas equações (4.2) e (4.3):

$$\underline{S} : \begin{cases} 0.044100b + 0.210v_0 + s_0 = 0.24 \\ 0.152100b + 0.390v_0 + s_0 = 0.29 \\ 0.276676b + 0.526v_0 + s_0 = 0.34 \\ 0.502681b + 0.709v_0 + s_0 = 0.39 \\ 0.840889b + 0.917v_0 + s_0 = 0.49 \\ 1.164241b + 1.079v_0 + s_0 = 0.59 \\ 1.937664b + 1.392v_0 + s_0 = 0.79 \\ 2.683044b + 1.638v_0 + s_0 = 0.99 \\ 3.523129b + 1.877v_0 + s_0 = 1.19 \\ 4.284900b + 2.070v_0 + s_0 = 1.39 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0.044100 & 0.210 & 1 \\ 0.152100 & 0.390 & 1 \\ 0.276676 & 0.526 & 1 \\ 0.502681 & 0.709 & 1 \\ 0.840889 & 0.917 & 1 \\ 1.164241 & 1.079 & 1 \\ 1.937664 & 1.392 & 1 \\ 2.683044 & 1.638 & 1 \\ 3.523129 & 1.877 & 1 \\ 4.284900 & 2.070 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} b \\ v_0 \\ s_0 \end{bmatrix}}_{\underline{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.24 \\ 0.29 \\ 0.34 \\ 0.39 \\ 0.49 \\ 0.59 \\ 0.79 \\ 0.99 \\ 1.19 \\ 1.39 \end{bmatrix}}_{\underline{w}} \quad (4.2)$$

e

$$\overline{S} : \begin{cases} 0.044944b + 0.212v + s_0 = 0.26 \\ 0.152881b + 0.391v + s_0 = 0.31 \\ 0.278784b + 0.528v + s_0 = 0.36 \\ 0.505521b + 0.711v + s_0 = 0.41 \\ 0.844561b + 0.919v + s_0 = 0.51 \\ 1.168561b + 1.081v + s_0 = 0.61 \\ 1.943236b + 1.394v + s_0 = 0.81 \\ 2.689600b + 1.640v + s_0 = 1.01 \\ 3.530641b + 1.879v + s_0 = 1.21 \\ 4.293184b + 2.072v + s_0 = 1.41 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0.044944 & 0.212 & 1 \\ 0.152881 & 0.391 & 1 \\ 0.278784 & 0.528 & 1 \\ 0.505521 & 0.711 & 1 \\ 0.844561 & 0.919 & 1 \\ 1.168561 & 1.081 & 1 \\ 1.943236 & 1.394 & 1 \\ 2.689600 & 1.640 & 1 \\ 3.530641 & 1.879 & 1 \\ 4.293184 & 2.072 & 1 \end{bmatrix}}_{\overline{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} b \\ v_0 \\ s_0 \end{bmatrix}}_{\overline{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.26 \\ 0.31 \\ 0.36 \\ 0.41 \\ 0.51 \\ 0.61 \\ 0.81 \\ 1.01 \\ 1.21 \\ 1.41 \end{bmatrix}}_{\overline{w}} \quad (4.3)$$

A resolução dos sistemas (4.2) e (4.3) pelo método dos mínimos quadrados consiste na resolução dos sistemas auxiliares  $\underline{A}^T \underline{A} \underline{u} = \underline{A}^T \underline{w}$  e  $\overline{A}^T \overline{A} \overline{u} = \overline{A}^T \overline{w}$ , que force no problema as melhores soluções aproximadas  $\underline{u} = (\underline{A}^T \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{w}$  e  $\overline{u} = (\overline{A}^T \overline{A})^{-1} \overline{A}^T \overline{w}$ , que definem as respectivas funções:

$$\underline{s}(t) = 0.2242t^2 + 0.1036t + 0.2126 \quad (4.4)$$

$$\overline{s}(t) = 0.2242t^2 + 0.1036t + 0.2326 \quad (4.5)$$

Para implementar o sistema (4.2) na Janela CAS do GeoGebra, primeiramente definiu-se os pontos  $P_i := (t_i, s(t_i))$  e os vetores  $p_i := (t_i, s(t_i))$ , para  $i = 1, \dots, 10$ . Em seguida  $A := \{\{\text{Elemento}(p1,1,1)^2, \text{Elemento}(p1,1,1), 1\}, \{\text{Elemento}(p2,1,1)^2, \text{Elemento}(p2,1,1), 1\}, \dots, \{\text{Elemento}(p10,1,1)^2, \text{Elemento}(p10,1,1), 1\}\}$  foi definida como matriz de coeficientes e  $w := \{\{\text{Elemento}(p1,2,1)\}, \{\text{Elemento}(p2,2,1)\}, \dots, \{\text{Elemento}(p10,2,1)\}\}$  foi definida como matriz de termos independentes. A matriz  $A^T$  foi definida por  $M := \text{MatrizTransposta}(A)$  e, por fim, a solução, obtida por  $p := \text{MatrizInversa}(M * A) * M * w$ , forcece um vetor com uma coluna e três linhas correspondentes à  $b, v_0$  e  $s_0$ , respectivamente. Os termos do vetor  $p$ , obtidos como solução do sistema  $\underline{s}$ , foram utilizados para definir  $g(x) = (\text{Elemento}(a, 1, 1))x^2 + \text{Elemento}(a, 2, 1)x + \text{Elemento}(a, 3, 1)$ , que corresponde à melhor função horária de ajuste para os extremos inferiores dos intervalos de dados, Figura 3.

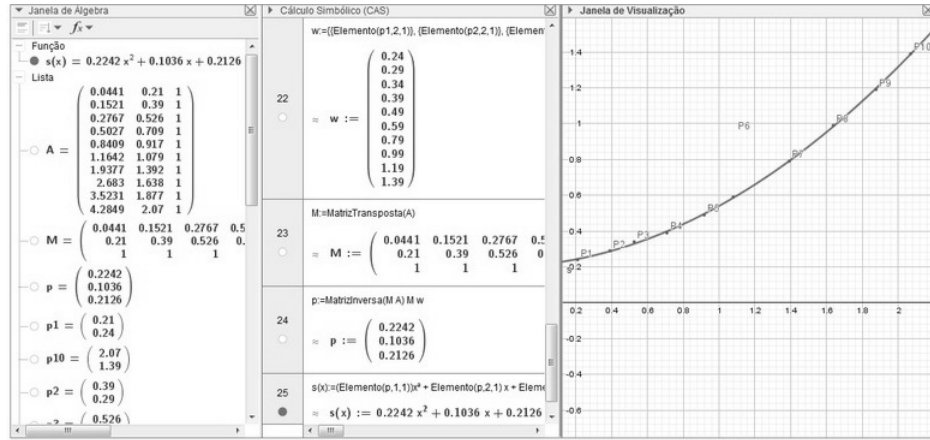


Figura 3: Esboço e obtenção da função de ajuste para os dados inferiores no software GeoGebra.

Olhando o esboço e a função de ajuste em uma perspectiva ampliada é possível perceber que existe pontos fora da curva Figura 4

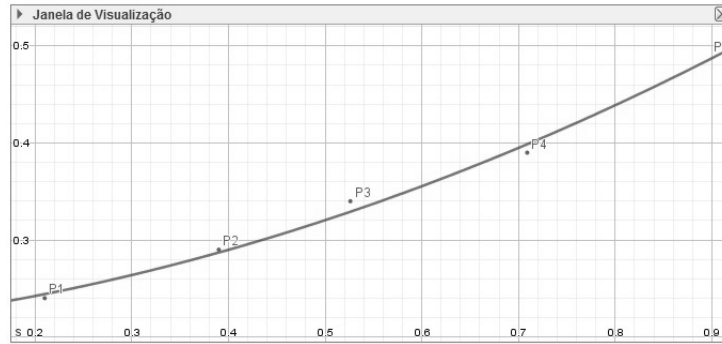


Figura 4: Esboço e obtenção da função de ajuste para os dados inferiores no software GeoGebra.

A função horária que ajusta os dados da extremidade superior é obtida no GeoGebra de forma análoga. Na Figura 5, pode-se ver o esboço e as funções de ajuste para ambas as extremidades dos dados.

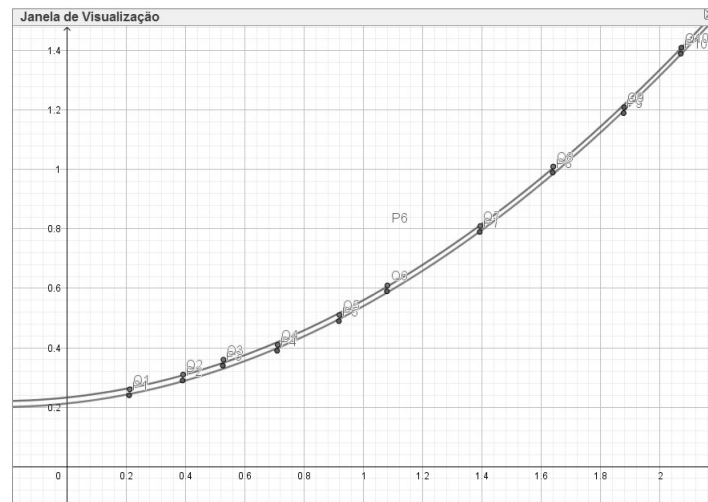


Figura 5: Esboço das extremidades dos dados intervalares com suas respectivas curvas de ajuste.

Escrevendo as soluções das equações (4.4) e (4.5) na forma intervalar e a solução da equação (4.1), obtida com o software Pasco Capstone, também em termos de intervalos, temos:

$$[\underline{s}(t), \overline{s}(t)] = [0.2242, 0.2242]t^2 + [0.1036, 0.1036]t + [0.2126, 0.2326] \quad (4.6)$$

$$s(t) = [0.2200, 0.2280]t^2 + [0.0800, 0.1200]t + [0.2150, 0.2310] \quad (4.7)$$

Analisando as equações (4.6) e (4.7), pode-se concluir que a solução por Mínimos Quadrados fornece valores exatos para  $a/2$  e  $v_0$ , que satisfazem a estimativa fornecida pela software Pasco Capstone. Tais valores, são as melhores opções para a função horária  $s(t) = bt^2 + v_0t + s_0$ . O coeficiente  $s_0$  divergiu sensivelmente nas duas soluções. Em relação a esse coeficiente, a solução intervalar fornece uma variação menor e o valor excedente 0.0016 entre as extremidades 0.2326 e 0.2310 é muito pequena.

## 5. Conclusão

Com o desenvolvimento do trabalho, conclui-se que a utilização da Matemática Intervalar e a aplicação do Método dos Mínimos Quadrados podem conferir maior precisão às soluções de problemas de ajuste de dados, quando comparadas às soluções usuais. Acredita-se que a associação das técnicas é favorável quando se trata de analisar problemas sujeitos a imprecisões, como é o caso de problemas experimentais.

O uso do software GeoGebra, além de apresentar uma linguagem acessível, se mostrou muito eficiente, possibilitando a implementação do método, a visualização dos dados iniciais e das funções de ajuste. O uso da Janela CAS se apresentou um atrativo do software por permitir edições na implementação mesmo após o desenvolvimento ter sido concluído.

**Abstract.** This work we used the Interval Mathematics and Least Squares Method to offer more reliability in solutions of problems of estimation of functions derived from experimental practices. The Interval Mathematics will be used to represent the data of an experimental practice corresponding to the displacement of a glider in an inclined air track. To estimate the best interval function that represents the data, the interval system obtained will be broken down into two, each corresponding to one end of the interval data. The resolution of each real system will be done by applying the Least Squares Method. All resolution will be made in the GeoGebra software, as well as the data sketch and adjustment functions. Comparing the solution obtained with this technique with the classical solution obtained through Pasco Capstone software, we conclude that the new solution is more accurate and that together with the classic solution can add more reliability to the solution of the problem.

## Referências

- [1] H. Anton, C. Rorres, “Álgebra Linear com Aplicações”, 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.
- [2] GeoGebra, O que é o GeoGebra, Disponível em: <<http://www.geogebra.org/about>>, Acesso em: 29 jul. 2017.

- [3] E. Hansen, G. W. Walster, “Global Optimization Using Interval Analysis: revised and expanded”, Vol. 264, CRC Press, 2003.
- [4] M. Hohenwarter, J. Hohenwarter, Ajuda GeoGebra: manual oficial da versão 3.2, Disponível em: <<https://app.geogebra.org/help/docuPT.pdf>>, Acesso em: 29 jul. 2017.
- [5] D. B. S. Lima, T. A. S. Almeida, E. C. Ribeiro, F. T. Santana, “Soluções por Mínimos Quadrados Utilizando a Janela CAS do GeoGebra”, in Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, SBMAC, 2018.
- [6] D. B. S. Lima, M. H. F. Marcone, F. T. Santana, “Estudo de Sistemas Intervalares Aplicados em Problemas Físicos com Imprecisões Numéricas”, in Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, SBMAC, 2018.
- [7] R. E. Moore, “Interval Analysis”, Prentice Hall, New Jersey, 1966.
- [8] H. N. Nagashima, Laboratório de Física I, Disponível em: <<http://www.feis.unesp.br/Home/departamentos/fisicaequimica/relacaodocentes973>>, Acesso em: 13 de mar. de 2018.
- [9] J. H. Vuolo, “Fundamentos da Teoria de Erros”, 2ed, São Paulo: Edgard Blücher, 1996.